数値計算および流体力学での発表資料における AVS の効果的使用法

松永 奈美
早稲田大学理工学術院理工学総合研究センター

目的： 数学系や工学系での発表においては，可視化をすることが最近当たり前になってきており，特に 3 次元化し，その計算結果をより目に見える形にすることによって，新たな発見をすることがある．しかしながら，口頭発表や論文への投稿において，すべて同じ可視化で良いかというとそうではなく，図の見せ方に工夫をしなければ，著者が思っているほど図の効果があまり出ていない場合がある．

そこで，ここでは，2 次元および 3 次元の可視化の有効な使い方や，逆にあまり良くない例を挙げて可視化の方法への効果的な使い方の提案を行う．

方法： ここでは，可視化の方法として AVS または MicroAVS を使用する．また，計算対象としては，2 次元有界領域 Ω における線形 Dirichlet 問題に対して 3 種類（Shortley-Weller (S-W) 近似，Bramble (B) 近似，Collatz (C) 近似）の有限差分法を用い [3]，その誤差解析の計算結果の検証として絶対誤差を z 軸に取り 3 次元表示を行う．また，狭窄部を有する 2 次元の血管内の流れに対しては，画像のピクセルデータをそのまま活かして，メッシュ生成を行わずにダイレクトに直交座標系に変換する方法を用い，任意領域に対する有限差分法を用いて計算し，その結果を MicroAVS を用いて 2 次元表示を行う [5, 6]．ここでは，拍動条件も入るため，その拍動の影響を考慮したパラメータであるストローハル数: St を Navier-Stokes 方程式に取り入れた式を用いることとする [6]．なお，格子点は基本的にピクセルの中心に取ることとするが，境界点は Hirt ら [2] の方法を用いて境界領域の情報を取る方法を用いる．また，離散化は西田の方法 [9] を用いるが，境界に隣接した点においては、NPLC 法と呼ばれる中野ら [8] の方法を用いて計算を行う．さらに，時間に対する計算や速度および圧力に対する離散化には，流体でよく用いられる SOR 法や風上差分などを考慮し，速度と圧力のカップリング形式を採用して計算するものとする [5, 6]．

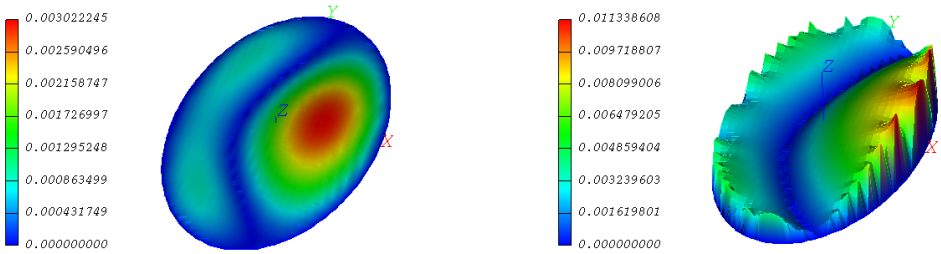
なお，いずれも直交格子系を使用するため，不等分割点を含む有限差分法が用いられていることに注意する．また，Dirichlet 問題での 3 種類の近似式の詳細に関しては，講演時にて説明を行う．

結果： まず，1 つの数値例として，以下の Dirichlet 問題に対して 3 種類の有限差分法を用いて計算を行った．ただし，ここでは，2 種類の計算結果のみを示す．

例 1. 2 次元有界領域：$\Omega = \{(x, y) \,|\, 4x^2 + y^2 < 4\}$ に対して，次の Dirichlet 問題を解くとする．ここでは，(a) S-W 近似，(b) B 近似 を用いて計算した絶対誤差の結果を図 1 で示す．

$$\begin{cases} -\Delta u = (4x^2 + y^2 - 14)(\sin x + \cos y) - 4(4x \cos x - y \sin y) & \text{in } \Omega, \\ \quad u = 0 \qquad \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，この厳密解は，$u(x, y) = (4x^2 + y^2 - 4)(\sin x + \cos y)$ である．

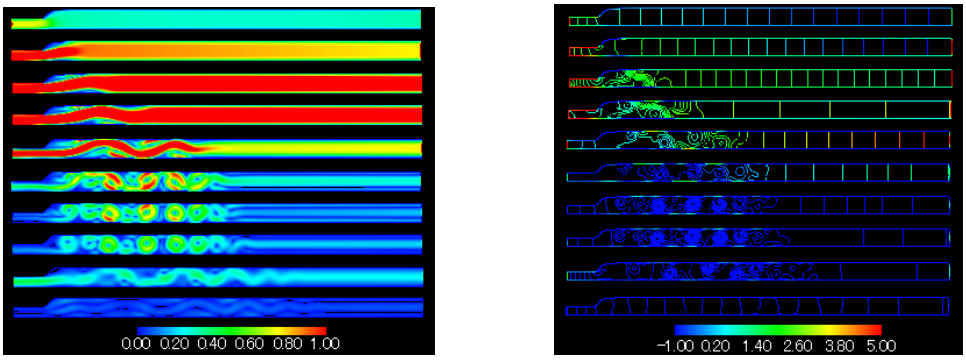


(a) S-W 近似　　(b) B 近似

図 1: 例 1 における (a) S-W 近似 と (b) B 近似における絶対誤差

なお，S-W 近似と B 近似の離散化の違いは不等分割点での離散化式のみであり，内点（等分割点）においては通常の中心差分を使用していることに注意する [3]．さらに，S-W 近似の打ち切り誤差は，不等分割点では 1 次精度であり，通常の点（等分割点）では 2 次精度である．また，B 近似の打ち切り誤差は，不等分割点では 0 次精度であり，内点では 2 次精度である．しかしながら，S-W 近似の各点での絶対誤差は，境界に近いところでは超収束性をもち，図 1 での計算では 3 次精度，内点では 2 次精度をもつ．また，B 近似に関しては，各点での絶対誤差は 2 次精度をもつことが知られている [3]．なお，絶対誤差の図 1 を見比べてみると，B 近似も 2 次精度をもつにも関わらず，S-W 近似のほうがはるかに誤差の影響が少ないことが分かる．これは，誤差を可視化することによって，その境界付近，すなわち，不等分割点での離散化の影響の違いが大きく出ていることが一目で分かる良い例である．図 1 での計算では，x 軸方向および y 軸方向の刻み幅を，それぞれ 0.07 としている．

例 2. 狭窄部を有する 2 次元血管内の流れを計算した結果を図 2 にて示す [6, 10, 11]．



(a) 速度分布図　　(b) 圧力分布図

図 2: 狭窄部を有する血流解析の計算結果（(a) 速度分布図 および (b) 圧力分布図）

計算結果の図 2 (a) を見ると，カラーではそれほど悪くはないが，(出力した際のデータにも依存するが）図 2 (b) においては，表示に工夫を行わないとかなり見づらい図になっていることが分かる．特にグレースケールを前提として論文で使用する場合，この計算結果の図では，背景が黒でその他の線が細いことと色合いの度合い（例えば，青や赤の濃淡）が同じであれば，論文用としての可視化の効果はあまり期待できないことになる．そのため，白黒用のカラーレジェンド（色合い）に変更することになるが，

ここでも，実際に AVS や MicroAVS を使用してみると，カラーレジェンドに枠をつけないと背景と同化してしまうという欠点や，色合いの工夫やラインの強調をしないと，グレースケールでの画像としてそのまま変換したのでは，効果は半減する．そのため，プレゼンテーション用の画像と論文用の画像には，同じ計算結果のデータを使用した場合でも，カラーで見せる場合とグレースケールにすべき場合の工夫の仕方はかなり変わってくることに注意すべきである．さらに，例えば,（ここでは紹介はしていないが）計算結果の流線の表示の仕方にも工夫が必要である.（流線やグレースケールの図に関する詳細の説明は，講演時にて示す.）すなわち，著者が意図して表示したい部分，特に狭窄部分の後ろの流れの様子や，または，分岐している部分での流れの様子の詳細を表示するためには，計算の時点で流線を書かせるようにあらかじめ計算に入れておくか，あとでアプリケーション側で表示をさせる際に，全体で表示できる状況にできるかどうかということも，計算する際にて確認すべき点となる．この血流計算の結果においては，速度のベクトル図も表示してみたが，ベクトル自身の色合いや太さ，また，時間ごとにおける値のスケールをどうするのかといった部分も考えた上で表示させなければ，あまりインパクトがない図が生じてしまう．これは，2 次元に限らず 3 次元の場合でも同じことが言える.

結論： AVS または MicorAVS による可視化による例を 2 つ示し，例 1 にて効果的な可視化および，その表示によってこれまで数学では数字だけで眺められていた部分の誤差評価の詳細が具体的に分かるようになったという点で，良い例として紹介した．また，例 2 においては，工学系ではよく使用される流体の計算において，その結果の表示を一部紹介したが，一般の発表においてはカラー効果および動画などは確かに効果的であるが，論文等にて色合い等の制約や文字の大きさをのバランスをきちんと考えないと，せっかくの可視化の効果が十分に発揮できないという現象が起こることを示した.

可視化の表示のクオリティの進歩は，研究の進歩に伴い，ここ数年特にものすごい効果を生み出していると思われるが，図の表示を状況によって使い新しい視点を見出すきっかけにもなり，プレゼンテーションとしての効果としてはさらに大きな成果を上げる．特に，3 次元の可視化を含めてより効果的な表示方法を工夫しながら，可視化の威力をさらに発揮するようにできれば，より各分野の研究の発展に貢献されるであろう.

参考文献

[1] X. Chen, N. Matsunaga and T. Yamamoto, “Smoothing Newton methods for nonsmoth Dirichlet problems” in *Reformulation - Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods* (M. Fkukushima and L. Qi eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, pp.65-79.

[2] C. W. Hirt and B. D. Nichols, “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, J. Comp. Phys., **39**(1981), pp.201-225.

[3] N. Matsunaga, “Comparison of three finite difference approximations for Dirichlet problems”, INFORMATION, Vol.2, No.1(1999), pp.55-64.

[4] N. Matsunaga, “Convergence of Swartztrauber-Sweet’s approximation for the Poisson-type equation on a disk”, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **20**(1999), pp.917-928.

[5] N. Matsunaga, H. Liu and R. Himeno, “Numerical analysis of two-dimensional incompressible viscous flow in orthogonal coordinates”, INFORMATION, Vol.5, No.3(2002), pp.319-326.

[6] N. Matsunaga, H. Liu and R. Himeno, “An image-based computational fluid dynamic method for haemodynamic simulation”, JSME International Journal, Series C, Vol.45, No.4(2002), pp.989-996.

[7] N. Matsunaga and T. Yamamoto, “Superconvergence of the Shortley-Weller approximation for Dirichlet problems”, J. Comput. Appl. Math., **116**(2000), pp263-273.

[8] 中野明・下村信雄・里深信行, “デカルト格子系による任意形状物体周りの圧縮性粘性流計算”, 日本機会学会論文集 (B 編), 61 巻 592 号 (1995), pp.4319-4326.

[9] 西田秀利, “非スタガード差分法による非圧縮性ナビェ・ストークス方程式の数値解”, 日本機会学会論文集 (B 編), 62 巻 599 号 (1996), pp.2646-2651.

[10] O. R. Tutty, Pulsatile flow in a constricted channel, ASME J. Biomech. Eng., 114(1992), pp.50-54.

[11] O. R. Tutty and T. J. Pedley, “Oscillatory flow in a stepped channel”, J. Fluid. Mech.,**247**(1992), pp.179-204.