「空間構造物の挙動評価シミュレーション事例について」

武藤　厚

名城大学・理工学部・建築学科

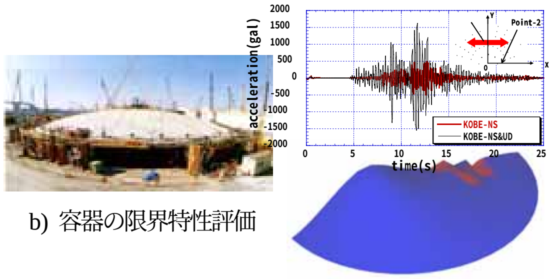
目的:　体育館や各種アリーナ等の大屋根を有する空間構造や種々の鉄筋コンクリート構造に関して、その性能（耐震性能など）を、主にコンピュータによる数値解析により検証する手法を提案し、実際の事例にて検証を行っている。それらの各段階にて可視化は不可欠となっているが、ここではその事例を示すと共に今後のあり方を探る。

方法:　筆者らの開発したRC連続体構造の複合非線形解析システムの結果を、適宜AVS等の書式で出力し表示する。一部はWinベースでOpen-GLにより内製されたリアルタイム表示システムによるものである。

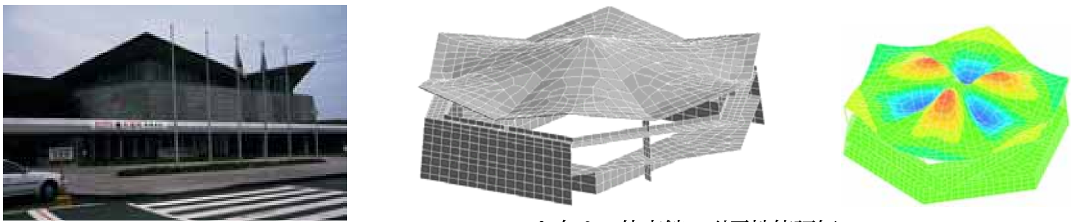
結果:　実際の数値解析と出力例をいくつか図示する。

結論:　空間構造物の数値解析に関する可視化の事例を示した。今後、構造デザインのプロセスへの数値解析の利用の高度化を検討しているが、この点についても立体視を含めた可視化の応用の可能性を検討して行く予定である。

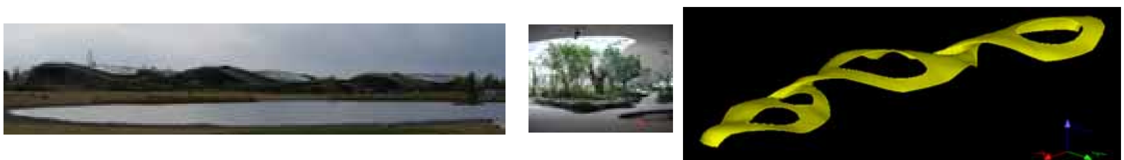
a) 冷却塔の崩壊事故の要因分析



b) 容器の限界特性評価

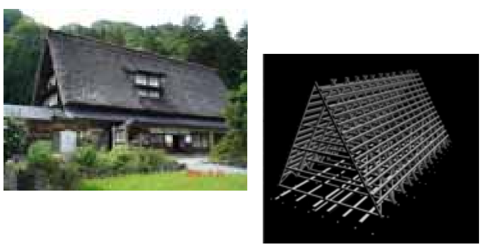


c) HP シェルを有する体育館の耐震性能評価



d) 大規模な自由曲面構造の性能評価

e) 数理的手法によるビルの設計



f) 歴史的建築物の力学特性の分析

図-1　非線形解析の事例

解析手法の概要

ここでは、偏平なＲＣシェルの非線形振動を取扱うために、幾何学的な非線形性と材料非線形性を考慮した複合非線形の運動方程式を有限要素法により離散化して数値解析を行なう。具体的には、ひずみと応力はGreen-Lagrangeひずみ、2nd Piola-Kirchhoff応力とし、幾何学的非線形性はTotal Lagrangeにより定式化し、コンクリート及び鉄筋の材料非線形性は増分の塑性理論により考慮した。時間方向は直接時間積分を行うが、以下にその概要を示す[1),4)]。

非線形性を考慮したＲＣシェルが多次元入力の地震力を受ける場合の過渡応答に関する釣合式を離散化して示す。後の数値積分の準備の為に時刻ｎ+１ステップについて表示すると[15),16)]、

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}+\mathbf{p}_{n+1}=\mathbf{f}_{n+1} \tag{1}$$

ここに$\mathbf{M}$、$\mathbf{p}$、$\mathbf{f}$、$\mathbf{x}$はそれぞれ質量マトリクス、内力ベクトル、外力ベクトル、及び変位ベクトルである。(1)式はコンクリートのクラックの開閉・圧壊や、鉄筋の降伏発生により履歴依存の問題となり、一般に内力ベクトルは、$\mathbf{p}_{n+1}=\mathbf{f}(\mathbf{x}_1\sim\mathbf{x}_{n+1},\dot{\mathbf{x}}_1\sim\dot{\mathbf{x}}_{n+1})$となる。

(1)式において接線剛性および減衰マトリクスは次式で示される。

$$\mathbf{K}_{n+1}=\partial\mathbf{p}_{n+1}/\partial\mathbf{x}_{n+1}\quad,\quad\mathbf{C}_{n+1}=\partial\mathbf{p}_{n+1}/\partial\dot{\mathbf{x}}_{n+1} \tag{2}$$

コンクリート及び鉄筋の損傷履歴により、内力ベクトルは経路に依存する。尚、以後の計算ではRayleigh型の減衰を用いる。

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{n+1}&=\mathbf{C}_{n+1}\dot{\mathbf{x}}_{n+1}+\mathbf{K}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}\\&=(\alpha_0\mathbf{M}+\beta_0\mathbf{K}_{n+1})\dot{\mathbf{x}}_{n+1}+\mathbf{K}_{n+1}\mathbf{x}_{n+1}\end{aligned} \tag{3}$$

外力ベクトルとしては、多次元の地震入力、及び自重等の外力を考慮して、次式のように設定する。

$$\mathbf{f}_{n+1}=-\mathbf{M}\boldsymbol{\xi}\ddot{\mathbf{g}}_{n+1}+\mathbf{b}_{n+1},\quad\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\&\vdots&\end{bmatrix},\quad\ddot{\mathbf{g}}_{n+1}=\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{g}}^x_{n+1}\\\ddot{\mathbf{g}}^y_{n+1}\\\ddot{\mathbf{g}}^z_{n+1}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

ここに、$\boldsymbol{\xi}$、$\ddot{\mathbf{g}}_{n+1}$はそれぞれ、地震影響マトリクス、入力加速度ベクトルであり、$\mathbf{b}_{n+1}$は地震力以外の時間依存の荷重を示す。

使用要素は図１に示すような形状の８節点アイソパラメトリック退化シェル要素を積層分割して用いた[17),18),19)]。コンクリートは厚さ方向に層分割され、鉄筋は等価な層として表現される。なお、ひずみ成分は(5)式に示すように、法線方向変位の一回微分に関する２次項までの非線形項を面内ひずみに考慮することで大変形を表現した。

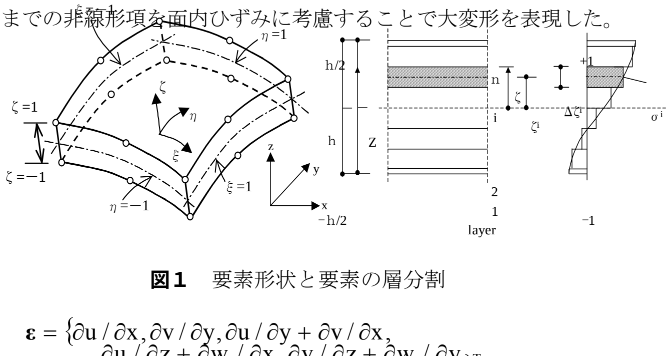


図１　要素形状と要素の層分割

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\{\partial u/\partial x,\partial v/\partial y,\partial u/\partial y+\partial v/\partial x,\partial u/\partial z+\partial w/\partial x,\partial v/\partial z+\partial w/\partial y\}^T+\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},0,0\right\}^T \tag{5}$$

要素の各応力成分は

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}\}^T=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

と示される。尚、用いた要素に関する座標系、変位場、形状関数及び構成関係行列$\mathbf{D}$については付録−１を参照されたい。

各断面力については以下のように示される。

$$\begin{aligned}N_{x(y)}&=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{x(y)}dz=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^i_{x(y)}\Delta\zeta^i\\M_{x(y)}&=-\int_{-h/2}^{h/2}z\,\sigma_{x(y)}dz=\frac{h^2}{4}\sum_{i=1}^{n}\sigma^i_{x(y)}\zeta^i\Delta\zeta^i\\Q_{x(y)}&=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz(yz)}dz=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\tau^i_{xz(yz)}\Delta\zeta^i\end{aligned} \tag{7}$$

材料非線形性に関しては、破壊限界の評価を目的の一つとするために、数値計算の安定性確保を優先し、コンクリートと鉄筋に関して比較的単純な構成則を用いた。コンクリート及び鉄筋の応力−ひずみ関係は図２に示すようなものを仮定した。コンクリートの破壊曲面は、Kupferの実験結果[20)]を塑性論に基づいて近似した（図３）。

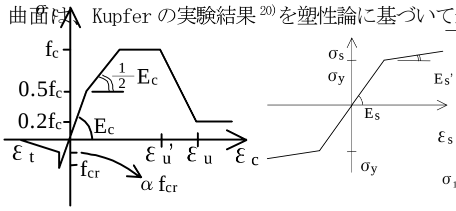


図２　コンクリート及び鉄筋の１軸応力−ひずみ関係

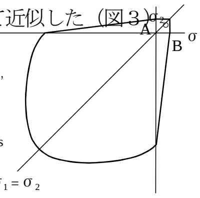


図３　コンクリートの破壊曲面のモデル化

（２軸圧縮）

$$f(\boldsymbol{\sigma})=\left\{1.355\left[(\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y)+3(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)\right]+0.355f_c(\sigma_x+\sigma_y)\right\}^{1/2}=f_c \tag{8-1}$$

（１軸圧縮１軸引張）

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\sigma})&=\frac{(f_c-f_{cr})\left(\sigma_m-\sqrt{J_2}\sin\phi/\sqrt{3}\right)}{f_c+f_{cr}}+\sqrt{J_2}\cos\phi-\frac{f_cf_{cr}}{f_c+f_{cr}}\\\sigma_m&=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\quad,\quad J_2=\frac{1}{3}(\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y)+\tau_{xy}^2\\\phi&=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left\{-\frac{3\sqrt{3}J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right\}\\J_3&=-\frac{1}{27}(2\sigma_x-\sigma_y)(2\sigma_y-\sigma_x)(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y)\tau_{xy}^2\end{aligned} \tag{8-2}$$

ひび割れ発生は、各層内の積分点における応力基準により、２つの主応力に対応して最大２方向のひび割れを想定した（１軸引張１軸圧縮状態においては、式(8-2)によりクライテリアを設定)。なお、ひび割れは直交し、一度発生したひび割れの方向は、当該要素の除荷により再接合しても変化せず、固定して取り扱う。数値計算では、１方向にひび割れが発生したと判定した場合、ひび割れ方向とその直交方向を主軸とする直交異方性材料として扱い、ひび割れ直交方向の主応力σ_1と対応する主ひずみε_1間の剛性を零とした。ひび割れ発生による応力再配分は、隣接する要素へ等価な節点力として開放し、発生する不釣合力は、増分の各ステップにおける収束計算により解消させる[1)]。なお、ひび割れ後のテンションスティフニングは図２に示すような一部の応力を解放した後、ひずみに関して線形で低下するものとし、せん断剛性低減係数は面内、面外共に0.25とした（クラックが閉じればその方向のせん断剛性は回復すると仮定)。

なお、繰返しに関して、コンクリートの圧縮側及び鉄筋については弾性の除荷／再載荷、コンクリートの引張側は原点指向とした。

時間積分には陰解法により、各ステップでの収束計算を行なうが、ここでは Hughes and Liu によるアルゴリズムと Newmark β 法を組み合わせて用いた[21),22)]（収束計算法は付録－２を参照されたい）。

参考文献

1) 日本建築学会 ： 空間構造の数値解析ガイドライン、2001.5
2) 日本建築学会 ： 空間構造の耐震設計と設計例、2001.1
3) 日本建築学会 ： 空間構造の動的挙動と耐震設計、2006.3
4) 武藤 厚、小山信夫、村田 賢、加藤史郎：上載圧を受ける鉄筋コンクリート球形シェルの非線形振動性状に関する検討－複合非線形性を考慮した数値解析手法と基本的な応答性状についてー、日本建築学会構造系論文集、No.549、pp.83～90、2001.11
5) 武藤 厚、花井建吾、舟崎孝介、加藤史郎：一葉双曲面ＲＣ造冷却塔の構造特性に及ぼす形状不整の影響の分析－実測された形状の再現モデルを用いた損傷・耐力評価－、日本建築学会構造系論文集、No.584、pp.103～110、2004.10
6) 武藤 厚、加藤友和、糠谷真理、平墳義正：鉄筋コンクリート造空間構造の振動特性に関する評価の試み－既存アリーナにおける振動測定と数値解析による振動特性の分析例－、日本建築学会構造系論文集、No.592、pp.113～119、2005.6
7) 武藤 厚、力津卓也、坂井田成臣、前川武洋：静的および動的荷重を受けるＲＣ球形シェルの複合非線形挙動の評価損傷と耐力に与える形状初期不整の影響の推定、日本建築学会構造工学論文集、Vol.51B、pp.23～30、2005.3
8) 佐々木睦朗：FLUX STRUCTURE フラックス・ストラクチャー、TOTO 出版、2005.6
9) 日経アーキテクチャ・編集部：地形に溶け込む自由曲面のシェル、日経アーキテクチャ、pp. 6-13、2005.10

付録－１．要素の概要

本文に示すように、本論では８節点のアイソパラメトリックシェル要素を積層分割して用いている。ここではその概要を示す[17),18),19)]。図 A－1 に示すような、シェル中央面における曲線座標（ξ，η）及びシェルの厚さ方向の直線座標ζに関して、形状関数は次式で与えられる（$-1 \le \xi, \eta, \zeta \le 1$）。

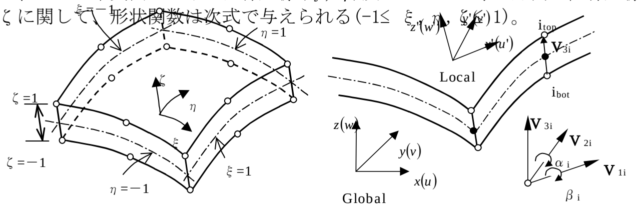


図 A－1 要素の座標系及び変位成分

$$N_K = (1+\xi\xi_K)(1+\eta\eta_K)(\xi\xi_K+\eta\eta_K-1)/4 \quad \text{：隅節点}$$

$$N_K = \xi_K^2(1+\xi\xi_K)(1-\eta^2)/2 + \eta_K^2(1+\eta\eta_K)(1-\xi^2)/2 \quad \text{：中間節点}$$

シェル要素の任意点での全体座標は、上下面の節点座標により次式で示される。

$$\{x,y,z\}^T = \sum N_i\{x_i,y_i,z_i\}^T_{mid} + N_i\zeta\mathbf{V}_{3i}/2$$

$$\{x_i,y_i,z_i\}^T_{mid} = \left(\{x_i,y_i,z_i\}^T_{top} + \{x_i,y_i,z_i\}^T_{bot}\right)/2$$

$$\mathbf{V}_{3i} = \{x_i,y_i,z_i\}^T_{top} - \{x_i,y_i,z_i\}^T_{bot}$$

要素内の変位は、$\mathbf{V}_{3i}$ に直交する $\mathbf{V}_{1i}$ と $\mathbf{V}_{2i}$ の単位ベクトル $\mathbf{v}_{1i}$ と $\mathbf{v}_{2i}$ を用いて次式で示される。

$$\{u,v,z\}^T = \sum N_i\{u_i,v_i,w_i\}^T + \sum N_i\zeta t_i[\mathbf{v}_{1i} - \mathbf{v}_{2i}]\{\alpha_i,\beta_i\}^T/2$$

ここで、$\{u_i,v_i,w_i\}^T$、t_i はシェル中央面での節点変位ベクトル及び板厚を示し、α_i、β_i はそれぞれ $\mathbf{V}_{1i}$、$\mathbf{V}_{2i}$ まわりの回転角を示す。計算においては $\mathbf{V}_{1i}$、$\mathbf{V}_{2i}$、$\mathbf{V}_{3i}$ を求め、本文中(5)式のひずみを求める。尚、本文中(6)式の応力－ひずみ関係における弾性状態での構成関係行列 D を次式に示す。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & 0 \\ \text{sym.} & & & & D_{55} \end{bmatrix}, \quad D_{11} = D_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad D_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad D_{33} = \frac{(1-\nu)E}{2(1-\nu^2)}, \quad D_{44} = D_{55} = \frac{5}{6}D_{33}$$

数値計算においては、ひずみ及び応力は層分割された各層の積分点において評価される。本論では次数低減積分により、コンクリート及び鉄筋の各層において（２×２）の積分点を用いている。

付録－２．時間積分について

非線形の時刻歴応答計算において、実際の各ステップにおける収束方法は図 A-1 に示す[21),22)]ものを用い、時間刻みは Δt=0.01sec、収束判定誤差は変位の並進成分のノルムで１％とした。また、数値計算における Newmark β 法のパラメータの組み合せに関し、S20T1 モデルのステップ荷重に対する応答で、（β=0.25、γ=0.5）と（β=0.3025、γ=0.6）[16)]の組合せについて図 A-2 に比較する。どちらの場合も崩壊荷重の評価には微少な差異しかないことを確認した（他のモデルも同様の結果である）。しかし、崩壊直前レベルの荷重に対する加速度応答を見ると、（β=0.25、γ=0.5）の場合には 1.5sec 付近から発散する現象が見られ（変位応答には現れない）、（β=0.3025、γ=0.6）では安定した応答を示した。本論では、概略の損傷・崩壊レベルの評価を主眼とし、数値計算上の安定性の問題を回避する為、（β=0.3025、γ=0.6）を用いた。このような数値減衰の導入は球形シェルのような高次モードが本質的に存在する場合には、応答値を小さく評価する可能性があり、慎重に取扱う必要があると考えられるが、今後の検討課題の一つとしたい。

次に減衰マトリクスは本文中(2)式に示すように、ここでは時刻に依存する形であり、現在 Rayleigh 減衰を仮定している為、接線剛性マトリクスに従って変化するものと解釈できる。図 A-3 には、時刻依存の減衰（$\mathbf{C}_T$）と、初期剛性による一定の減衰（$\mathbf{C}_{const}$）を用いた場合の応答の比較を示す。これらの違いが崩壊荷重や応答値へ与える影響は微少であり、崩壊レベルまでの非線形解析においても、時間依存の減衰の影響は小さいと考えられる。

< n+1 ステップにおけるイテレーションの概要 >

（予測値）
$$\mathbf{x}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{x}_n + \Delta t\dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t^2(1-2\beta)\ddot{\mathbf{x}}_n/2$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{x}}_n$$
$$\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} = [\mathbf{x}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{x}_{n+1}]/(\Delta t^2\beta) = 0$$

（不釣合力の評価）
$$\boldsymbol{\varphi}^{(i)} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{P}(\mathbf{x}_{n+1}^{(i)}, \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)})$$

（動的有効剛性の評価）
$$\mathbf{K}^* = \mathbf{M}/(\Delta t^2\beta) + \gamma\mathbf{C}_T/(\Delta t\beta) + \mathbf{K}_T(\mathbf{x}_{n+1}^{(i)})$$

（増分変位の修正）
$$\Delta\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{K}^{*-1}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$$

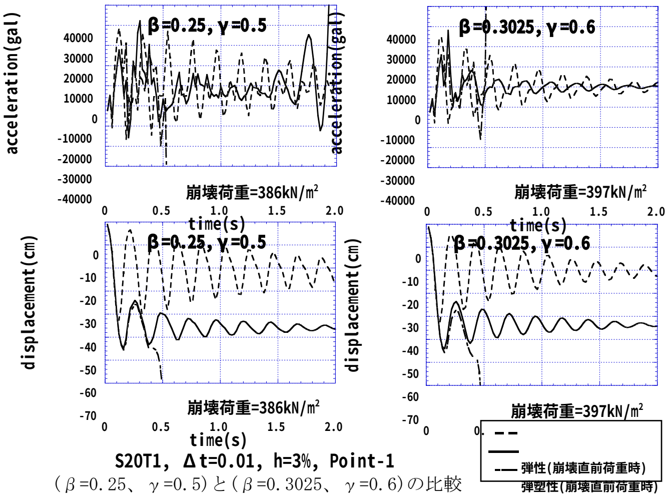
（修正値）
$$\mathbf{x}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{x}_{n+1}^{(i)} + \Delta\mathbf{x}^{(i)}$$
$$\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i+1)} = [\mathbf{x}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{x}_{n+1}]/(\Delta t^2\beta)$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i+1)} = \dot{\mathbf{x}}_{n+1} + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i)}$$

収束判定

NG / OK

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^{(i+1)}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i+1)}$$
$$\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^{(i+1)}$$

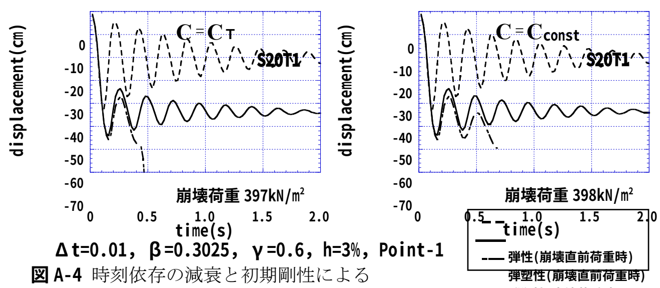
図 A-2 動的非線形解析収束アルゴリズム



S20T1, Δt=0.01, h=3%, Point-1

（β=0.25、γ=0.5）と（β=0.3025、γ=0.6）の比較

図 A-3 Newmark β 法のパラメータの組み合せ



Δt=0.01, β=0.3025, γ=0.6, h=3%, Point-1

図 A-4 時刻依存の減衰と初期剛性による一定の減衰を用いた場合の応答の比較